

ベッツの法則の理解の為に.

目 次

1: ベッツの法則の要約	Page 1
2: 風力発電機は如何にして空気を変形させるか	Page 2
3: ベッツの法則の証明	Page 3
4: 空気 (風) のエネルギーについて	Page 5

Betz' Law

Leistung, welche wir mit einem Windrade von D m Durchmesser bei einer Windgeschwindigkeit v m/sek dem Winde entziehen können, ist demnach

$$L_{\max} = \frac{16}{27} \cdot \frac{\rho}{2} v^3 \cdot \frac{D^2 \pi}{4} \text{ mkg/sek}$$

The original formulation of Betz' law in German

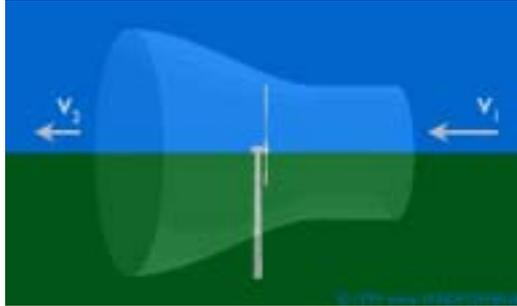
© Copyright 1997-2003 Danish Wind Industry

2004 March by T.A

1) ベッツの法則の要約

風を如何に有効に停止させるか

風の中からその運動エネルギーを大量に引き出せることが出来ればそれだけ、写真に示される様に左側に離れるに従いその速度が低下します。(もし写真に示された左側空気のゆがみ(変形)に疑問をお持ちの場合、次ページに書かれました、風力発電機は如何にして空気を変形させるかをお読み下さい)。



もし風の中の全エネルギーを引き出すことが出来れば発電機から通り過ぎる空気は、空気はそこで停止した状態でゼロとなりますが、実際は連続して入ってくれるべき次の空気を邪魔しますので、全エネルギーをなんら吸収した訳でなくなってしまいます。もうひとつの極端な現象では、風は自由に発電機の周りを通り過ぎることが出来るのです。従って風からのエネルギーをなんら吸収していない事となります。

この極端な現象のどこかに、風を停止できる方法がないかを考え、又得られた風のエネルギーを効率よく機械的エネルギーに変換出来ないかを考えて見ます。回答は驚くほど単純な結果になります。理想的な風力発電機は実際の風速の 2/3 迄減速出来ます。理解の為には風力発電機の空気力学用基本的物理法則を取り入れなければなりません。それがベッツの法則です。

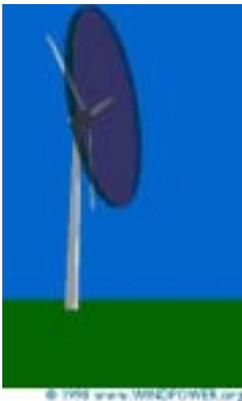
ベッツの法則



ベッツの法則に依れば風の持つ運動エネルギーを風力発電機を利用して機械的エネルギーに変換出来る最大値は 16/27 (or 59%) 迄であるとなっています。ベッツの法則は 1919 年ドイツ物理学者 アルバートベッツ氏により始めて発表されました。1926 年同氏の著書 "Wind-Energie" の中でその当時の発電機と風のエネルギーの十分な関連付けが説明されています。プロペラの動作による円形の面積が、プロペラ型発電機の全てに応用出来る事実が明らかにされたのは全く驚くべき事です。彼の定理を証明するには物理と数学からの検証が必要とされますが今ここでそのことは実行する必要はありません。彼の著書にもそう記されています。この説明書の他の

章でその証明に関する記事を示します。

2) 風力発電機は如何にして空気を変形させるか



左の図解は空気の所有するエネルギーを説明するために作られた物で単純化されたイメージです。この説明は5ページで詳しく説明します。羽の円形面積が発電機に与えられる空気のエネルギーです。風の面積は羽の直前で拡大されます。この事実は風のエネルギー全てを利用できない事になります。これがベッツの法則です。下のイメージでは風は右手方向から吹き、風の運動エネルギーの一部を補足する為の道具を使用します。(この例では回転翼を意味していますが、他の方式も利用されています。)



風力発電機の回転翼は風の運動エネルギーを補足した時点で機械運動エネルギーに変換する訳ですから、風速は低下します。この事により風速は右に入り込む速度より羽根から左に離れる方が遅くなる筈です。毎秒ごとに羽根の円面積に入り込む風の量は回転翼の左側で離れさる量と同等の筈です。従って回転面背後の直径(断面)

は大きく拡大されています。

上記のイラストは想像的管を使っています。発電機の回転翼回りの流れる管を表現した物です。流れの管により左側の低速になった風の面積は回転翼背後で面積が拡張されたかを示しています。羽根から離れ去る速度は急激でなく徐々に低下しその後安定して一定に達します。

回転翼の前後での空圧の配分について



上記のグラフの意味は、垂直方向には空圧を意味し、水平方向では回転翼面からの距離を意味しています。右側から風が回転翼に近づくと、回転翼の役目は風の邪魔者になる為に空圧は徐々に加圧されます。羽根に当たった瞬間に(羽根の左側に出る瞬間)空圧は低下し、その後正しい空圧に徐々に復帰してゆきます。

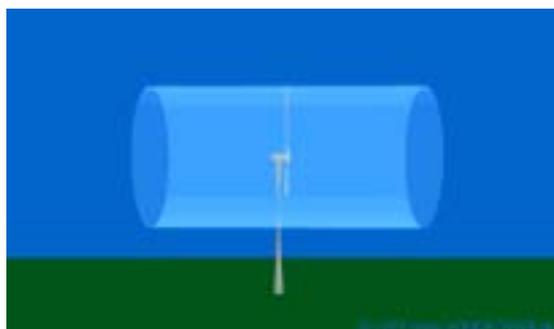
その後の現象はどうなっていますか？

周りの環境の高速での風と羽根から出てきた低速での風の間には混合が始まりそれは乱気流となります。回転翼の背後は丁度風の影で低圧ですが、遠ざかるにつれ圧力は回復します。さらにこの現象をパーク効果と名づけ、ウインドファームの様に一箇所に複数の発電機を設置する場合、横方向では羽根の直径の4倍

の間隔、縦方向には 7 倍の距離を持たせ、風の不安定性から避難させています。

何故円筒形の風の管にならないのですか？

ここで読者の皆さんは、もし発電機を筒の中に入れた場合でも、羽根は回転しているのだから以下の様な管の状態になる筈だと思われる方も多いのです。そして何故瓶のように首がくびれるのだと疑問を寄せられます。



勿論この様な筒の中に入れた場合羽根は回転しますが、実際どのような現象が起こるか考えて見ます。

羽根の右から風が入ります。そうすると右側の風の速度は、左側では遅くなる筈です。一方右側に入り込む空気量と左から出で行く空気量は同等でなければなりません。これらの事実より、推察出来るのは、筒の中に障害物を設けた場合（この場合は回転翼）右から入り込む空気のある部分は（管の右側の空気圧が高くなっている為）変形せざるを得ない筈と気がつきませす。したがって平行な円筒形の空気の流れは、羽根に当たった場合、変形せざるを得ないことが実証できます。

3) ベッツの法則の証明

本説明でベッツの法則が正しい事を証明したいと存じます。この章に至るまでに、読者の皆様は既に “発電機の羽は空気を変形している “、” ベッツの法則の結論 ” の説明はお読みになっておられます。しかしそれでも、良く解らないと思われる場合、以下の説明を読み飛ばしてください。以下は 1926 年ベッツの法則を、彼が著書 Wind-Energie で説明しようとした内容です。



ここで、風速の平均値を考えます。発電機に入り込む前の邪魔されない風速 v_1 と羽根を出た後の風速 v_2 の平均を出します：計算式は $(v_1 + v_2)/2$ 。
一秒での羽根を通過する空気の質量は： $m = \rho F (v_1 + v_2)/2$

m = 一秒あたりの質量、 ρ = 空気の密度、 F は回転翼の円形面積、 $(v_1 + v_2)/2$ は回転翼を通過する風速です。回転翼により引き出された “ エネ

ルギー”は風速の2乗で低下した損失分に質量を掛け合わせたものとなります
(ニュートンの第二の法則より):大文字のPは Power で得られたエネルギー。

$$P = (1/2) m (v_1^2 - v_2^2)$$

最初に示しました方程式から今回の m を置き換えますと、風から引き出せるエネルギーを次のように表現出来ます。

$$P = (\rho / 4) (v_1^2 - v_2^2) (v_1 + v_2) F$$

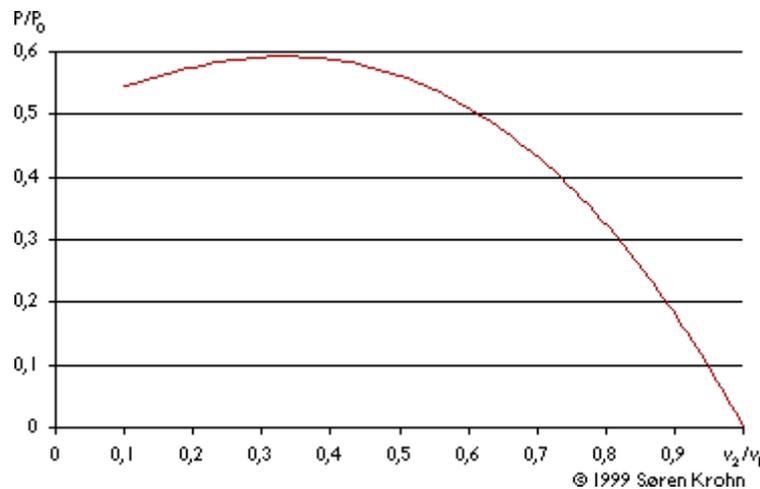
さて、この結果と、風の筒の中で羽根の抵抗のない邪魔されていない状態でのエネルギーと比較します。邪魔されていないエネルギーを P_0 と呼びます:

$$P_0 = (\rho / 2) v_1^3 F$$

回転翼で得られたエネルギーと障害物のない状態でのエネルギーの比率は以下のように表現できます。

$$(P/P_0) = (1/2) (1 - (v_2 / v_1)^2) (1 + (v_2 / v_1))$$

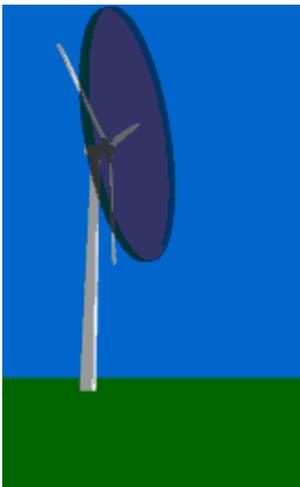
v_2 / v_1 の関数の変化に伴う P/P_0 をプロットします。



最大値は $v_2 / v_1 = 1/3$ となり風から引き出せる総エネルギー最大値は 0,59 (又は 16/27) です。

4) エネルギー : (気密度と回転翼面積について)

風力発電機は、風の力を、回転翼運動によりトルク変換しエネルギーを得ています。風が回転翼を通じて与えてくれるエネルギー量は、空気密度、羽根の回転面積、および風速により変化します。



© 1998 www.WINDPOWER.org

左の挿絵の意味は、円形で空気を切り取り、その空気厚み 1 メーターが (典型的 1000KW 発電機の羽根総面積) $2,300\text{M}^2$ を通過する状態を説明したものです。(円面積 = 半径² × 3.14) ;

54 メーター直径の羽根に当る空気の総重量は 2.8 トンになります。($2300 \times 1.225\text{kg}$)

空気密度

移動する物体の運動エネルギーはその質量 (又は重量) と比例します。風の中の運動エネルギーは、この様に空気の密度で変化します (即ち一容量単位での質量)

言い方を変えれば、空気が重たければ重たいほど、発電機が得られるエネルギーは多く得られます。通常の圧力下で、温度 15 での空気の重さは、1 立方メートル当り 1.225kg です。しかし湿度が増加すると密度は少し減少します。又空気は暖かいより冷たいほど密度が増加します。標高が高い程 (高山のように) 空気圧は低下し、空気密度も減少します。

回転翼面積

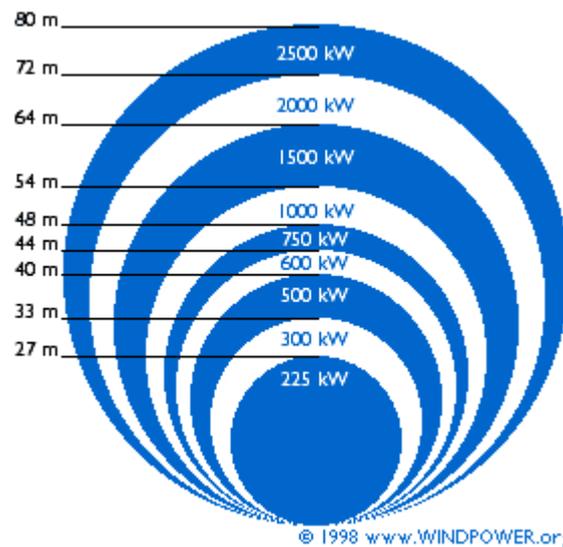
典型的大型発電機 1,000KW の場合羽根の直径は 54meter で、回転総面積は $2,300\text{M}^2$ に達します。この面積で風からどれ程のエネルギーを回収できるかを決定します。

羽根の長さの増加に伴う回転面積の増加は直径の二乗ですので、例えば二倍にすると $2^2 = 2 \times 2 = 4$ と 4 倍のエネルギーを得ることになります。

回転面積と発電量関係の補足説明

農業に従事にされる方はどれ程の畑を持っているかの説明にはヘクタールやエーカーの単位を使って説明します。風力発電の場合も同様で、農業は水平面の説明ですが、風力の場合は垂直面の説明となります。

回転翼で覆われた円盤状の面積 (そこに風の速度が加算されます) は一年でどれ程のエネルギーを収穫できるかを決定しています。



大型発電機の例が上記の図です。600kW 発電機の場合通常 44Meter 直径の羽根を有します。羽根の直径の 2 倍は面積換算では 4 倍（2 乗）となります。この意味は同時に出力が 4 倍に増加する事となります。

回転翼の実際の寸法は、各場所での風の状況が異なるため、又メーカーの考えにも依り、色々変化しますので上記の図が絶対と言う訳でもありません。大きい羽根を回すにはそれだけ大きな力（強い風）が必要です。従ってもし風の力が弱い場所で発電機を設置するのであれば、与えられた羽根の面積に対し発電機を小さなものに変え効率を維持する筈です。（又は与えられた発電機に対し羽根をさらに大きくする）。600kW タイプでは羽根の直径は 39～48meter と変化しています。風速の弱い場所で小さな発電機のほうが（同じ羽根の大きさで）より出力を得られるかの理由は、羽根の回転が一年を通じ多く回ってくれるからです。

大型発電機を選ぶ理由

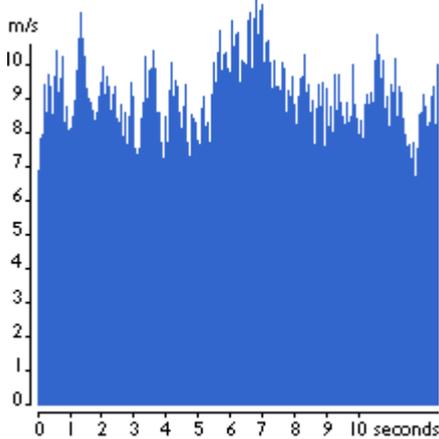
1. 風力発電機の大きさから得られる経済学があります。即ち大型は小型より、より大量の電気をより安価に供給してくれます。基礎工事、道路工事、売電用の架線工事、発電機内の多くの工事（電気操作回路等）の費用は機械寸法に比例はしていません。
2. 大型発電機は通常海岸に向かって設置するのに適しています。基礎工事費用や保守点検費用は発電機の大きさに比例して決して増加する訳ではありません。
3. 一台設置しか望めない場所では、高い塔で大型が非常に高い効率が見込めます。

小型発電機を選ぶ理由

- 1 . 売電用接続の相手が大型発電機よりの流れを受け入れられない程虚弱体制である場合。通常その場所では人口があまり多くなく電気消費量もほとんどない場合が通常。
- 2 . 小型の発電機で多く構成されるウインドパークでは出力の変動幅が小さく、大型の場合変動幅が多く接続切断が頻繁に起こりえます。小型発電機のメリットは相手方の吸収容量が小さい場合に適します。
- 3 . 場所によっては大型クレーンを使ったり大型での重量輸送に耐える道路建設費が不要となり小型発電建設費が非常に安価である事もメリットです。
- 4 . 小型の発電機による分散発電は、雷等の影響で一台が停止しても他の発電機は作動可能です。
- 5 . 美的景観保護の見地から小さな発電機の利用を推進する場合があります。しかし大型発電機の羽根の回転はゆっくり見え、人の目に違和感は起こりませんが、小さな発電機の羽根の周速は早く、返って人目につき、且つ小型発電機は台数が増えますので、人目につく場合もあります。

5) 乱気流について

あなたは今迄、あられやヒョウ、雷雨に遭遇された事があると思います。その時風のその方向や速度が頻繁に変化している事にお気づきだと思います。



© 1998 www.WINDPOWER.org

非常に不均一な地形表面では、又障害物（例えば建物）の背後では乱気流が絶え間なく発生し非常に不確定な風速を引き起こしその近辺で渦巻き、旋風を引き起こします。

乱気流が風速に大きい変化を与えている例を左の測定例で示します。

乱気流は風力発電機の使用効率を著しく低下させます。それ以上に発電機の寿命を縮めます。地表での乱気流を避ける為に塔の高さは十分高くなければなりません。